JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 7, 281–292 (1973)

Spezielle rationale Splinefunktionen

ROBERT SCHABACK

Institut für numerische und instrumentelle Mathematik, Universität Münster, 4400 Münster, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received December 1, 1970

In dieser Arbeit werden rationale Splinefunktionen mit quadratischem Zähler und linearem Nenner durch Differenzierbarkeitseigenschaften und Interpolationsbedingungen definiert und untersucht. Für die Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe im Bereich dieser Splinefunktionen bei Vorgabe von Werten in den Knotenpunkten und je einer Randbedingung laßt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung angeben. Die Lösung ist eindeutig bestimmt und durch global konvergente Gradientenverfahren berechenbar. Außerdem zeigen die hier betrachteten rationalen Splinefunktionen bei Interpolation der Werte glatter Funktionen in zusammenrückenden Knotenpunkten ein ähnliches asymptotisches Verhalten wie kubische Splinefunktionen.

1. DEFINITION DES INTERPOLATIONSPROBLEMS

DEFINITION 1. Gegeben sei eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1.1}$$

eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ der reellen Zahlen. Eine Funktion $f \in C^2[a, b]$, deren Restriktionen $f_j := f \mid [x_j, x_{j+1}]$ auf die Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ von (1.1) rationale Funktionen

$$f_j(x) = \frac{a_j + b_j x + c_j x^2}{d_j + e_j x}$$

mit einem Zählergrad $\leqslant 2$ und einem Nennergrad $\leqslant 1$ sind, wird im folgenden als *rationale Splinefunktion* bezeichnet.

DEFINITION 2. Gegeben seien reelle Zahlen $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v und eine Zerlegung (1.1) von $[a, b]$. Als *rationale Spline-Interpolierende* zu den Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v auf der Zerlegung (1.1) wird eine rationale Splinefunktion $f \in C^2[a, b]$ bezeichnet, die Interpolationsbedingungen

$$f(x_j) = y_j \qquad (0 \leqslant j \leqslant n + 1) \tag{1.2}$$

sowie im Punkt $x_0 = a$ eine fest gewählte der Bedingungen

$$f'(a) = u \qquad \text{oder} \qquad f''(a) = u \tag{1.3}$$

und im Punkt $x_{n+1} = b$ entsprechend

$$f'(b) = v \qquad \text{oder} \qquad f''(b) = v \tag{1.4}$$

erfüllt.

2. Notwendige Bedingungen für die Existenz einer rationalen Spline-Interpolierenden

Aus Definition 1 folgt, daß eine rationale Splinefunktion eine in $[a, b]$ identisch oder nirgends verschwindende zweite Ableitung hat, denn die zweite Ableitung einer rationalen Funktion mit quadratischem Zähler und linearem Nenner ist von der Form $a/(bx + c)^3$. Daraus ergibt sich

Satz 1. *Zu den Werten* $y_0, ..., y_{n+1}, u, v$ *auf einer Zerlegung* (1.1) *existiert höchstens dann eine rationale Spline-Interpolierende, wenn es in* $C^2[a, b]$ *eine lineare oder streng konvexe oder streng konkave Funktion gibt, die den Bedingungen* (1.2), (1.3), *und* (1.4) *genügt.*

Für die praktische Anwendung benutzt man Satz 1 besser in einer anderen Form. Dazu werden bei gegebener Zerlegung (1.1) und gegebenen Werten $y_0, ..., y_{n+1}, u, v$ in der üblichen Weise [3] Differenzenquotienten durch

$$D^1(y_j, y_{j+1}) := \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \qquad (0 \leqslant j \leqslant n) \tag{2.1}$$

definiert und die Größen

$$D_j := D^1(y_j, y_{j+1}) - D^1(y_{j-1}, y_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{2.2}$$

$$D_0 := \begin{cases} D^1(y_0, y_1) - u & \text{bei Vorgabe von } f'(a) = u, \\ u & \text{bei Vorgabe von } f''(a) = u, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$D_{n+1} := \begin{cases} v - D^1(y_n, y_{n+1}) & \text{bei Vorgabe von } f'(b) = v, \\ v & \text{bei Vorgabe von } f''(b) = v, \end{cases} \tag{2.4}$$

eingeführt.

Satz 2. *Das obige Interpolationsproblem ist nur dann lösbar, wenn mit* $s = 0, 1$ *oder* -1 *gilt*

$$\operatorname{sgn} D_j = s \qquad (0 \leqslant j \leqslant n + 1). \tag{2.5}$$

Beweis. Für jede lineare oder strikt konvexe oder strikt konkave Funktion $f \in C^2[a, b]$ gilt offenbar für alle $x \in [a, b]$ die Beziehung

$$\operatorname{sgn} f''(x) = s$$

mit $s = 0$, 1 bzw. -1.

Da jede der Größen D_j bis auf einen positiven Faktor als Wert von f'' an einer Stelle des Intervalls $[a, b]$ darstellbar ist, haben im Falle der Lösbarkeit des Interpolationsproblems alle diese Größen das Vorzeichen s.

3. Grundgleichungen

Analog zur Berechnung von kubischen Spline-Interpolierenden (vgl. [1, Seite 9–12]) erhält man aus (1.2), (1.3) und (1.4) und der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit einer rationalen Spline-Interpolierenden $f(x)$ durch einfache Rechnungen ein nichtlineares Gleichungssystem für die Größen $f''(x_j)$. Mit den Bezeichnungen

$$h_j := x_{j+1} - x_j \qquad (0 \leqslant j \leqslant n) \tag{3.1}$$

$$h_{-1} := h_{n+1} := 0, \qquad M_{-1} := M_{n+2} := 0 \tag{3.2}$$

sowie (2.2), (2.3), und (2.4) besagt der folgende Satz, daß das betreffende Gleichungssystem auch hinreichend ist.

Satz 3. *Es seien reelle Zahlen $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v sowie eine Zerlegung* (1.1) *gegeben. Der Vektor $(M_0, \ldots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit*

$$\operatorname{sgn} M_j = s \qquad (0 \leqslant j \leqslant n+1), \qquad s \in \{0, 1, -1\} \tag{3.3}$$

sei Lösung des Gleichungssystems

$$h_{j-1} M_{j-1} M_j^2 + h_j M_{j+1} M_j^2 = 2D_j \tag{3.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
&j = 0, 1, \ldots && \textit{bei Vorgabe von } f'(a) = u,\\
&j = 1, 2, \ldots \textit{ und } M_0^3 = u && \textit{bei Vorgabe von } f''(a) = u,\\
&j = \ldots, n, n+1 && \textit{bei Vorgabe von } f'(b) = v,\\
&j = \ldots, n-1, n;\ M_{n+1}^3 = v && \textit{bei Vorgabe von } f''(b) = v.
\end{aligned}$$

Dann existiert eine interpolierende rationale Splinefunktion $f(x) \in C^2[a, b]$ zu den Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v und es gilt

$$f''(x_j) = M_j^3 \qquad (0 \leqslant j \leqslant n+1). \tag{3.5}$$

Beweis. Es sei $(M_0, \dots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ eine Lösung von (3.4) mit der Eigenschaft (3.3). Gilt $s = 0$ in (3.3), so folgt aus (3.4) das Verschwinden aller D_j und daher ist die lineare Funktion

$$f(x) = y_0 + \frac{y_{n+1} - y_0}{b - a}(x - a) \tag{3.6}$$

eine rationale interpolierende Splinefunktion zu den Werten $y_0, \dots, y_{n+1}, u, v$. Für den Rest des Beweises werde deshalb $s \neq 0$ vorausgesetzt. Man verifiziert leicht mit Hilfe von (3.1) und (3.3), daß die Abschätzung

$$\frac{x_{j+1} - x}{h_j} \frac{M_j - M_{j+1}}{M_j} < 1$$

für jedes $j \in \{0, \dots, n\}$ und alle $x \in [x_j, x_{j+1}]$ gilt. Die durch

$$\begin{aligned} f_j(x) := y_{j+1} &+ (x - x_{j+1})\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} + \frac{1}{2} h_j M_j M_{j+1}^2\right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{M_{j+1}^3 (x_{j+1} - x)^2}{1 - (x_{j+1} - x)\dfrac{M_j - M_{j+1}}{h_j M_j}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

definierte rationale Funktion mit quadratischem Zähler und linearem Nenner ist also in $[x_j, x_{j+1}]$ zweimal stetig differenzierbar. Durch einfache Rechnungen erhält man

$$\begin{aligned} f_j(x_j) &= y_j & f_j(x_{j+1}) &= y_{j+1} \\ f_j'(x_j) &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{2} h_j M_j^2 M_{j+1} & f_j'(x_{j+1}) &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} + \frac{1}{2} h_j M_j M_{j+1}^2 \\ f_j''(x_j) &= M_j^3 & f_j''(x_{j+1}) &= M_{j+1}^3 . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wegen der Gültigkeit von (3.4) folgt daraus sofort

$$f_j'(x_{j+1}) = f_{j+1}'(x_{j+1}) \qquad (0 \leqslant j \leqslant n - 1)$$

und die Annahme der "Randwerte" u und v durch die Funktionen f_0 und f_n. Zusammen mit den Gleichungen (3.8) ergibt sich insgesamt, daß die Funktion

$$f(x) := f_j(x)$$

für alle $x \in [x_j, x_{j+1}]$ und alle $j \in \{0, \dots, n\}$ eine rationale interpolierende Splinefunktion zu den Werten $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}, u, v$ ist.

4. Existenz

Satz 4. *Die Bedingung* (2.5) *für die Existenz einer rationalen Spline-Interpolierenden zu den Werten* $y_0, \ldots, y_{n+1}, u, v$ *ist auch hinreichend. Für den Fall* $\operatorname{sgn} D_j = s \neq 0$ *für alle* $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ *ergibt sich eine Lösung* $(M_0, \ldots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ *der Gleichungen* (3.4) *mit der Eigenschaft* (3.3) *als Minimum der Funktion*

$$E(M_0, \ldots, M_{n+1}) := \sum_{i=0}^{n+1} \left(h_{i-1} M_{i-1} M_i + \frac{2D_i}{M_i} \right) \tag{4.1}$$

im Bereich

$$K := \left\{ (M_0, \ldots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \,\middle|\, \begin{array}{lll} \operatorname{sgn} M_j = s & & (0 \leqslant j \leqslant n+1) \\ M_0^3 = u, & \textit{falls} & f''(a) = u \textit{ vorgegeben} \\ M_{n+1}^3 = v, & \textit{falls} & f''(b) = v \textit{ vorgegeben} \end{array} \right\}. \tag{4.2}$$

Beweis. Im Falle $s = 0$ ist die lineare Funktion (3.6) wegen (2.5) eine interpolierende rationale Splinefunktion zu den Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}, u, v$. Es werde also für den Rest des Beweises angenommen, daß $s = +1$ gilt (der Fall $s = -1$ kann durch Umkehrung der Vorzeichen von $y_0, \ldots, y_{n+1}, u, v$ auf den Fall $s = +1$ zurückgeführt werden).

Im Bereich K nimmt die Funktion E nur positive Werte an; einer dieser Werte werde mit E_0 bezeichnet. Dann definiere man die Größen

$$m_1 := \frac{2}{E_0} \min_{0 \leqslant j \leqslant n+1} D_j$$

$$m_2 := \frac{E_0}{m_1} \left(\min_{0 \leqslant j \leqslant n} h_j \right)^{-1}$$

sowie den Würfel

$$\hat{K} := \{ (M_0, \ldots, M_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid 0 < m_1 \leqslant M_j \leqslant m_2 \; (0 \leqslant j \leqslant n+1) \}. \tag{4.3}$$

Außerhalb des Inneren von $\hat{K}$ gilt $E(M_0, \ldots, M_{n+1}) > E_0$, denn aus $0 < M_j \leqslant m_1$ für ein $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ folgt

$$E(M_0, \ldots, M_{n+1}) > \frac{2D_j}{M_j} \geqslant \frac{2D_j}{m_1} \geqslant E_0$$

und aus

$$M_j \geqslant m_2$$

folgt zusammen mit $M_{j-1} \geqslant m_1$ oder $M_{j+1} \geqslant m_1$

$$E(M_0, \ldots, M_{n+1}) > \max(h_{j-1}M_{j-1}M_j\,,\, h_jM_{j+1}M_j)$$
$$\geqslant m_1m_2 \min_{0\leqslant j\leqslant n} h_j = E_0\,.$$

Die Funktion E nimmt also im Inneren des Kompaktums $\hat{K} \cap K$ ihr globales Minimum bezüglich K an. Wegen der Differenzierbarkeit von E in K gelten die Gleichungen (3.4) im Minimum von E in K; nach Definition von K ist (3.3) erfüllt. Aus Satz 3 folgt schließlich die Behauptung dieses Satzes.

5. Eindeutigkeit

Satz 5. *Zu gegebenen Werten $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v auf einer Zerlegung* (1.1) *existiert höchstens eine rationale Spline-Interpolierende.*

Beweis. Die zweite Ableitung der Differenz $g \in C^2[a, b]$ zweier rationaler Spline-Interpolierenden f_1 und f_2 zu gleichen Vorgaben $y_0, \ldots, y_{n+1}$, u, v auf einer Zerlegung (1.1) hat in jedem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ von $[a, b]$ die Form

$$\frac{a}{(bx+c)^3} - \frac{a'}{(b'x+c')^3}\,.$$

Daraus folgt, daß $g''(x)$ in jedem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ entweder identisch verschwindet oder höchstens eine Nullstelle hat. Wegen der Interpolationsbedingung (1.2) verschwindet g in den Punkten $x_0, \ldots, x_{n+1}$ von (1.1) und daher genügt es zu zeigen, daß g'' in $[a, b]$ identisch verschwindet. Nach dem Satz von Rolle hat g' mindestens $n + 1$ Nullstellen x_j' in (x_0, x_{n+1}) und g'' verschwindet in mindestens n verschiedenen Punkten $x_j'' \in (x_0', x_n')$. Bei Vorgabe von $f''(a)$ hat g'' in $x_0 = a$ eine weitere Nullstelle; bei Vorgabe von $f'(a)$ verschwindet g' in $x_0 = a$ und g'' in einem Punkt $\hat{x} \in (a, x_0')$. Entsprechendes gilt für die Vorgaben im Punkt $x_{n+1} = b$. In jedem Fall besitzt also g'' in $[a, b]$ mindestens $n + 2$ Nullstellen. Deshalb verschwindet g'' identisch in einem Teilintervall $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ von $[a, b]$.

Jetzt folgt die Behauptung induktiv: Im Fall $n = 0$ ist nichts mehr zu beweisen. Angenommen, das Interpolationsproblem mit höchstens n Teilintervallen sei eindeutig lösbar. Dann folgt aus dem Verschwinden von $g = f_1 - f_2$ in einem Teilintervall $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ der Zerlegung (1.1), daß die Funktionen f_1 und f_2 in $[x_0, x_{j_0}]$ und $[x_{j_0+1}, x_{n+1}]$ das gleiche Interpolationsproblem mit Vorgabe von $f''(x_{j_0})$ und $f''(x_{j_0+1})$ lösen. Nach Induktionsvoraussetzung stimmen f_1 und f_2 auch in diesen Intervallen, also in $[a, b]$ überein.

6. Numerische Behandlung des Problems

Nach dem Beweis von Satz 4 liefert jeder Punkt $(M_0, \ldots, M_{n+1}) \in K$, in dem alle partiellen Ableitungen der oben definierten Funktion E verschwinden, eine rationale Spline-Interpolierende zu vorgegebenen Werten. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes hat die Funktion E daher außer dem Minimum *keinen* stationären Punkt in K.

Es ist also leicht möglich, die Gleichungen (3.4) durch iterative Minimierungsverfahren für reelle Funktionen zu lösen. Auf einfache Weise wird dies durch sukzessive Minimierung längs der Koordinatenachsen (*Einzelschrittverfahren*) geleistet.

Beginn. Man wähle einen Startwert $M^0 := (M_0^0, \ldots, M_{n+1}^0) \in K$ und setze $E(M^0) =: E_0$, $k := 1$.

Iterationsschritt. Durch den vorherigen Schritt sei der Vektor $M^{k-1} := (M_0^{k-1}, \ldots, M_{n+1}^{k-1})$ festgelegt. Dann setze man für $j = 0, \ldots, n+1$ nacheinander

$$M_j^k := \begin{cases} M_0^{k-1} & \text{falls} \quad j = 0 \qquad \text{und} \quad f''(a) = u \quad \text{vorgegeben}, \\ M_{n+1}^{k-1} & \text{falls} \quad j = n+1 \quad \text{und} \quad f''(b) = v \quad \text{vorgegeben}, \\ \left(\dfrac{2D_j}{h_{j-1} M_{j-1}^k + h_j M_{j+1}^{k-1}} \right)^{1/2}, & \operatorname{sgn} \quad M_j^k = \operatorname{sgn} D_j \quad \text{sonst}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Satz 6. *Das Verfahren konvergiert für jeden Startwert $M^0 \in K$, falls* (2.5) *mit $s \neq 0$ gilt.*

Beweis. Nach (6.1) liegt die Folge $\{M^k\}$ in K. Beim Übergang von $(M_0^k, \ldots, M_{j-1}^k, M_j^{k-1}, \ldots, M_{n+1}^{k-1})$ zu $(M_0^k, \ldots, M_j^k, M_{j+1}^{k-1}, \ldots, M_{n+1}^{k-1}) =: M_{jk}$ verkleinert sich die Funktion E um den Betrag

$$\begin{aligned} \Delta E &= \underbrace{\frac{\partial E}{\partial M_j}\bigg|_{M_{jk}}}_{=0} (M_j^k - M_j^{k-1}) + \frac{1}{2} (M_j^k - M_j^{k-1})^2 \frac{\partial^2 E}{\partial M_j^2}\bigg|_z \\ &= \frac{1}{2} (M_j^k - M_j^{k-1})^2 \frac{4D_j}{z^3} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit einem z zwischen M_j^k und M_j^{k-1}; der Term $(\partial E / \partial M_j)|_{M_{jk}}$ verschwindet wegen (6.1).

Nach dem Beweis des Existenzsatzes liegen die Punkte $M \in K$ mit $E(M) \leqslant E_0$ in einem Kompaktum (4.3). Aus (6.2) folgt für alle $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\Delta E \geqslant L(M_j^k - M_j^{k-1})^2 \geqslant 0, \qquad L = \frac{2E_0 m_1}{m_2^3}.$$

Da E nach unten beschränkt ist, erhält man für jedes $j \in \{0, \ldots, n+1\}$

$$| M_j^k - M_j^{k-1} | \to 0 \qquad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Nach (6.1) gilt

$$h_{j-1} M_{j-1}^k + h_j M_{j+1}^k - \frac{2D_j}{(M_j^k)^2} = h_j(M_{j+1}^k - M_{j+1}^{k-1}) \to 0, \tag{6.3}$$

und die Gleichungen (3.4) werden für $k \to \infty$ beliebig gut erfüllt.

Die durch (6.1) definierte Folge $\{M^k\}$ liegt wegen der Monotonie von $E(M^k)$ in $\hat{K}$ (vgl. (4.3)). Auf Grund der Kompaktheit von $\hat{K}$ hat $\{M^k\}$ mindestens einen Häufungspunkt. Nach (6.3) ist jeder Häufungspunkt Lösung von (3.4). Aus der Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich die Konvergenz der Folge, und zwar für jeden beliebigen Startwert aus K.

7. Konvergenzaussagen

Problemstellung. Es sei $f \in C^p[a, b]$, $p = 0, 1$ und es sei eine Folge $\{Z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ der Form

$$Z^k : a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n_k+1}^k = b, \qquad n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{7.1}$$

mit

$$h_j^k := x_{j+1}^k - x_j^k, \qquad (0 \leqslant j \leqslant n_k) \tag{7.2}$$

und

$$h_k := \max_{0 \leqslant j \leqslant n_k} h_j^k \to 0 \qquad \text{für} \quad k \to \infty \tag{7.3}$$

gegeben. Zu jeder Zerlegung Z^k existiere eine rationale Splinefunktion $f_k \in C^2[a, b]$ mit

$$f_k(x_j^k) = f(x_j^k) \qquad (0 \leqslant j \leqslant n_k + 1). \tag{7.4}$$

Was läßt sich dann über das Konvergenzverhalten der Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit dem Limes f für $k \to \infty$ aussagen?

Wegen der notwendigen Bedingung (2.5) kann man unter den obigen Voraussetzungen annehmen, daß die gegebene Funktion $f \in C^p[a, b]$, $p = 0, 1$ entweder linear oder strikt konvex oder strikt konkav ist und sich auf den Fall der Konvexität beschränken. Eine Lösung des obigen Problems ergibt sich dann aus dem folgenden allgemeinen Satz über konvexe Interpolation.

Satz 7. *Es sei $f \in C^0[a, b]$ eine konvexe Funktion. Ferner sei $\{Z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine*

Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ *der Form* (7.1) *mit der Eigenschaft* (7.3). *Zu jeder Zerlegung* Z^k *existiere eine konvexe Funktion* $f_k \in C^0[a, b]$ *mit* (7.4). *Sei* $[a', b']$ *ein festes, aber beliebiges Teilintervall von* (a, b). *Dann gilt gleichmäßig in* $[a', b']$

$$\text{(a)} \qquad |f_k(x) - f(x)| = \mathcal{O}(h_k); \tag{7.5}$$

$$\text{(b)} \qquad |f_k^{(q)}(x) - f^{(q)}(x)| = o((h_k)^{1-q}), \qquad q = 0, 1 \tag{7.6}$$

im Falle $f \in C^1[a', b']$;

$$\text{(c)} \qquad |f_k^{(q)}(x) - f^{(q)}(x)| = \mathcal{O}((h_k)^{2-q}), \qquad q = 0, 1 \tag{7.7}$$

im Falle $f \in C^2[a', b']$.

Beweis. Für alle $j \in \{1,\dots, n_k\}$ und alle $x \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$ gilt wegen der Konvexität von f die Ungleichung

$$\frac{f(x_j^k) - f(x_{j-1}^k)}{h_{j-1}^k} \leqslant \frac{f(x) - f(x_j^k)}{x - x_j^k} \leqslant \frac{f(x_{j+1}^k) - f(x_j^k)}{h_j^k} \tag{7.8}$$

und dieselbe Einschließung gilt wegen (7.4) und der Konvexität von f_k auch für f_k anstelle von f. Also hat man für alle $x \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$ die Abschätzung

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant h_k \left(\frac{f(x_{j+1}^k) - f(x_j^k)}{h_j^k} - \frac{f(x_j^k) - f(x_{j-1}^k)}{h_{j-1}^k}\right). \tag{7.9}$$

Wegen $[a', b'] \subset (a, b)$ und der Konvexität von f liegen alle Differenzenquotienten von f in $[a', b']$ zwischen

$$\frac{f(a) - f(a')}{a - a'} \quad \text{und} \quad \frac{f(b') - f(b)}{b' - b}.$$

Damit ergibt sich (7.5) aus (7.9).

Im Falle (b) folgt unter Verwendung des Stetigkeitsmoduls $\omega(f', \delta)$ von f' aus (7.9) die Abschätzung

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant h_k(f'(z_j) - f'(z_{j-1}))$$

mit $z_j \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$, $z_{j-1} \in [x_{j-1}^k, x_j^k]$ und man erhält wegen der Monotonie von f' die Aussage

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant h_k\omega(f', 2h_k) = o(h_k). \tag{7.10}$$

Für die Ableitungen ergibt sich aus (7.4) und der Konvexität von f und f_k

$$\begin{aligned} |f_k'(x) - f'(x)| &\leqslant \frac{f(x_{j+2}^k) - f(x_{j+1}^k)}{h_{j+1}^k} - \frac{f(x_j^k) - f(x_{j-1}^k)}{h_{j-1}^k} \\ &\leqslant f'(z_{j+1}) - f'(z_{j-1}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

für alle $x \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$ mit $z_{j+1} \in [x_{j+1}^k, x_{j+2}^k]$, $z_{j-1} \in [x_{j-1}^k, x_j^k]$ und es folgt wegen der Monotonie von f' schließlich

$$|f_k'(x) - f'(x)| \leqslant f'(x_{j+2}) - f'(x_{j-1}) \leqslant \omega(f', 3h_k) = o(1)$$

für alle $x \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$. Damit ist (7.6) bewiesen. Im Falle (c) erhält man (7.7) aus (7.10) und (7.11) wegen $\omega(f', h_k) = \mathcal{O}(h_k)$.

KOROLLAR. *Existieren die Ableitungen $f'(a)$ und $f_k'(a)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und gilt*

$$|f_k'(a) - f'(a)| = \begin{Bmatrix} \mathcal{O}(1) \\ o(1) \\ \mathcal{O}(h_k) \end{Bmatrix} \textit{ im Falle } \begin{Bmatrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{Bmatrix},$$

so gilt Satz 7 *auch im Falle $[a', b'] \subset [a.b)$.*

Beweis. Für jedes $x \in [a, x_1^k]$ gilt

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0^k)}{x - x_0^k} \leqslant \frac{f(x_2^k) - f(x_1^k)}{h_1^k}$$

und

$$f_k'(a) \leqslant \frac{f_k(x) - f_k(x_0^k)}{x - x_0^k} \leqslant \frac{f_k(x_2^k) - f_k(x_1^k)}{h_1^k}.$$

Daraus folgt mit (7.4)

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant h_k \left(\frac{f(x_2^k) - f(x_1^k)}{h_1^k} - f'(a) + |f_k'(a) - f'(a)|\right)$$

und wegen der Beschränktheit der ersten Differenzenquotienten von $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ bleibt der Beweis von Satz 7 von (7.9) an auch im Falle $a' = a$ richtig.

Bemerkung. Setzt man lediglich $f \in C^2[a, b]$ und $f_k \in C^2[a, b]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ voraus, so kann nicht einmal auf die *punktweise* Konvergenz

$$f_k'' \to f'' \qquad \text{für} \quad k \to \infty \tag{7.12}$$

geschlossen werden, was sich an folgendem Beispiel erkennen läßt: Zu einer beliebigen Funktion $f \in C^2[a, b]$ mit $f'' > 0$ und einer Zerlegungsfolge $\{Z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $[a, b]$ wähle man einen festen Punkt $x \in (a, b)$, der in keiner der Z^k als Teilpunkt vorkommt. Etwa durch abwechselndes Aneinandersetzen von Geraden- und Kreisbogenstücken konstruiere man konvexe Funktionen $f_k \in C^2[a, b]$, die f auf Z^k interpolieren und in demjenigen Teilintervall von Z^k, welches x enthält, linear sind. Dann tritt keine Konvergenz $f_k''(x) \to f''(x)$ ein.

Mit anderen Methoden kann dagegen im Falle $f''(x) \geqslant \epsilon > 0$ für alle $x \in [a, b]$ die Konvergenz (7.12) für die in dieser Arbeit behandelten rationalen

Splinefunktionen bewiesen werden ([2, Seite 64–68]). In einer weiteren Arbeit wird sich diese Aussage als Spezialfall eines allgemeinen Satzes ergeben.

Numerisches Beispiel. Interpolation der Funktion $y = \tan x$ im Intervall $[0, \pi/4]$ in n äquidistanten Stützstellen. Bei Randvorgabe von $y'(0)$ und $y'(\pi/4)$ erhält man die folgende Tabelle für den maximalen Fehler.

TABELLE 1

Knotenzahl	Rationaler Spline	Kubischer Spline
4	$0.323 \cdot 10^{-3}$	$0.603 \cdot 10^{-3}$
5	$0.135 \cdot 10^{-3}$	$0.220 \cdot 10^{-3}$
6	$0.687 \cdot 10^{-4}$	$0.975 \cdot 10^{-4}$
7	$0.397 \cdot 10^{-4}$	$0.496 \cdot 10^{-4}$
8	$0.249 \cdot 10^{-4}$	$0.277 \cdot 10^{-4}$
9	$0.167 \cdot 10^{-4}$	$0.167 \cdot 10^{-4}$
10	$0.117 \cdot 10^{-4}$	$0.106 \cdot 10^{-4}$
11	$0.854 \cdot 10^{-5}$	$0.708 \cdot 10^{-5}$
12	$0.641 \cdot 10^{-5}$	$0.490 \cdot 10^{-5}$

Aus der Tabelle 1 ist zu ersehen, daß der Interpolationsfehler bei rationalen Splines bis $n = 8$ kleiner ist als bei kubischen Splines. Durch das Verschwinden von $\tan''(0)$ wird im ersten Teilintervall der rationale Spline annähernd linear und bringt gegenüber den weiteren Teilintervallen einen relativ großen Fehler. Dieser Effekt ist im wesentlichen für die Größe des Interpolationsfehlers der rationalen Splines bei großem n verantwortlich. Zur weiteren Illustration dienen die beiden beigefügten Skizzen (Abb. 1 und 2).

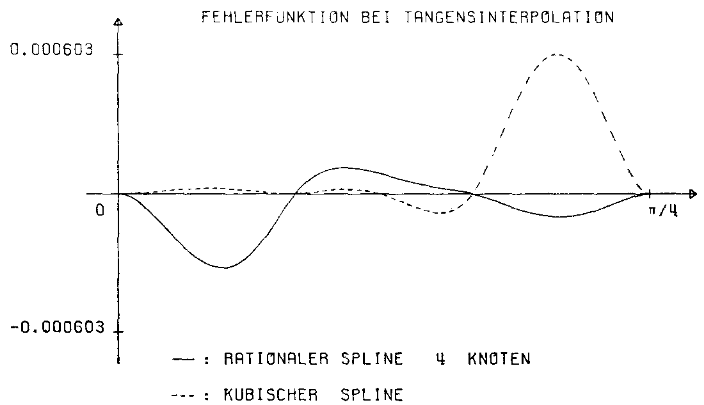

ABBILDUNG 1

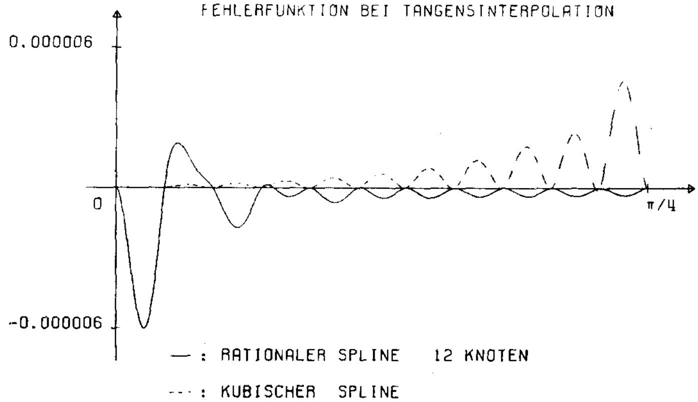

ABBILDUNG 2

ANERKENNUNG

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. Werner für die Anregung und Förderung dieser Arbeit, die in anderer Form als Dissertation von der Universität Münster angenommen wurde.

Ferner möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Meinardus und Herrn Dr. D. Braess für ihre wertvollen Verbesserungsvorschläge danken.

LITERATUR

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, AND J. L. WALSH, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, New York/London, 1967.
2. R. SCHABACK, Spezielle rationale Splinefunktionen, Dissertation, Münster, 1969.
3. H. WERNER, "Praktische Mathematik I, II," Vorlesungsausarbeitung, Münster, 1968/69.